BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Т.В.ШИРИНОВ, Я.А.ШАРИФОВ
Азербайджанский Технический Университет
Бакинский Государственный Университет

Рассматривается система линейных гиперболических уравнений с нелокальными условиями. Предложен численный метод решения таких систем. Приведены результаты численных экспериментов.

В работе предложен и исследован численный метод решения систем линейных уравнений с переменными коэффициентами при интегральных условиях, являющихся разновидностью так называемых нелокальных краевых условий [1]. Такие задачи возникают в теории упругости, при изучении контактных задач. Корректность постановки таких задач объясняется тем, что иногда невозможно непосредственное измерение каких-либо физических величин, но известно их усредненное значение. Подобные случаи имеют место при изучении явлений, происходящих в плазме, процессов распространения тепла, некоторых технологических процессов, процессов влагопереноса в пористых средах, обратных задачах, а также в задачах математической биологии и демографии и т. д. [2-6].

Применяемый метод расщепления заменяет граничную задачу в интегральном виде двумя задачами Коши. Первоначально метод расщепления появлялся как итеративный метод для нелинейных граничных задач. Для линейной задачи этот метод оказывается точным.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую линейную систему гиперболических уравнений:

$$y_{ts} = a(t,s)y_t + b(t,s)y_s + c(t,s)y + f(t,s), (t,s) \in [0,T] \times [0,l], \quad (1)$$

где $y(t,s) \in E^n$ - искомая вектор-функция, $a(t,s)$, $b(t,s)$, $c(t,s)$- матрицы- функций размерности $(n \times n)$, вектор функция $f(t,s) \in E^n$ заданы. Пусть требуется найти решение системы (1) при следующих условиях:

$$y_t(t,0) = A(t)y(t,0) + B(t), t \in [0,T], \quad (2)$$

$$y_s(0,s)=\psi(s),\ s\in[0,l], \tag{3}$$

$$\int_0^T n(t)y(t,0)dt=c. \tag{4}$$

Здесь матрица $A(t)$, $t\in[0,T]$ размерности $(n\times n)$, $B(t)\in E^n$ вектор-функция, $n(t)$- матрица функция размерности $(n\times n)$, причем $\det \int_0^T n(t)dt\neq 0$, $c\in E^n$ заданный n- мерный постоянный вектор. Предполагается, что задача (2)-(4) имеет единственное решение. Этот факт позволяет рассматривать задачу (1)-(4) как классическую задачу Гурса-Дарбу. Однако, условие (4) не дает возможность при численном решении задачи (1)-(4) применять известные методы для решения задачи Гурса-Дарбу. В данной работе наша основная цель с помощью метода расщепления данную задачу привести к классической форме.

2. Сведение задачи к классической задаче Гурса-Дарбу.

Предлагаемый ниже подход численного решения поставленной задачи с интегральными краевыми условиями (4) основан на идее классического расщепления краевых условий на начальные условия. Метод заключается к введению новых переменных, за счет которых получается $2n$- мерное дифференциальное уравнение с разделенными граничными условиями. Применяя метод расщепления, полученная краевая задача приводится к двум задачам Коши.

Введем новую переменную:

$$z(t)=\int_0^t n(\tau)y(\tau,0)d\tau,$$

и отсюда

$$\dot z(t)=n(t)y(t,0).$$

Тогда получается следующая краевая задача

$$y_t(t,0)=A(t)y(t,0)+B(t), \tag{5}$$

$$\dot z(t)=n(t)y(t,0), \tag{6}$$

$$z(0)=0,\ z(T)=c. \tag{7}$$

Решение задачи (5)-(7) будем искать в виде

$$z(t)=M(t)y(t,0)+N(t), \tag{8}$$

где $M(t)$- матрица размерности $(n\times n)$ и $N(t)\in R^n$- подлежат определению.

Из (8) получаем

$$\dot z(t)=\dot M(t)y(t,0)+M(t)y_t(t,0)+\dot N(t) \tag{9}$$

Учитывая в (9) равенства (5), (6) имеем

$$n(t)y(t,0)=\dot{M}(t)y(t,0)+M(t)[A(t)y(t,0)+B(t)]+\dot{N}(t), \qquad (10)$$

или

$$(\dot{M}(t)+M(t)A(t)-n(t))y(t,0)+\dot{N}(t)+M(t)B(t)=0 .$$

Для того, чтобы равенство (10) выполнялось для любого $y(t,0)$ необходимо выполнение равенств

$$\dot{M}(t)=-M(t)A(t)+n(t), \qquad (11)$$

$$\dot{N}(t)=-M(t)B(t). \qquad (12)$$

Из (8) потребуем, чтобы выполнялось второе условие (7). Тогда из равенства

$$z(T)=M(T)y(T,0)+N(T)=c$$

следует, что $N(T)=c$ и $M(T)=0$.

Тогда получаем следующие задачи Коши

$$\dot{M}(t)=-M(t)A(t)+n(t), M(T)=0,\ t\in[0,T], \qquad (13)$$

$$\dot{N}(t)=-M(t)B(t),\ N(T)=c,\ t\in[0,T], \qquad (14)$$

С помощью задач Коши (13) и (14) однозначно определяются матрица-функция $M(t)$ и вектор функция $N(t)$.

Теперь из (8) потребуем, чтобы выполнялось первое условие (7). Тогда

$$z(0)=M(0)y(0,0)+N(0)=0. \qquad (15)$$

(15) является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y(0,0)$. Определяя $y(0,0)$ из (15), тем самым получаем классическую задачу Гурса-Дарбу. Действительно, зная $y(0,0)$ из равенств (2), (3) определяем $y(0,s)$ и $y(t,0)$:

$$y(0,s)=y(0,0)+\int_0^s \psi(\eta)d\eta, \qquad (16)$$

$$y(t,0)=y(0,0)+\int_0^t [A(\tau)y(\tau,0)+B(\tau)]d\tau .$$

3. Дискретизация поставленной задачи.

Пусть $\{t_j\}_0^J$ и $\{s_i\}_0^I$ некоторое разбиение отрезков $[0,T]$ и $[0,l]$, соответственно. Обозначим $h_i=s_{i+1}-s_i$, $i=0,1,..,I-1$ и $\tau_j=t_{j+1}-t_j$, $j=0,1,..,J-1$. Рассмотрим разностную схему для краевой задачи (5)-(7):

$$y_{j+1,0}=(1+h_jA_j)y_{j,0}+h_jB_j, \qquad (17)$$

$$z_{j+1}=z_j+h_jn_jy_{j,0}, i=0,1,..,J-1, \qquad (18)$$

$$z_0=0, z_j=c, \qquad (19)$$

здесь A_j, B_j и n_j приближенные значения функций $A(t)$, $B(t)$ и $n(t)$, соответственно, в точках разбиения. Решение разностной схемы (17)-(19) будем искать в виде

$$z_j = M_j y_{j,0} + N_j, \tag{20}$$

где $M_j - (n \times n)$- мерная матрица и N_j-n- мерный вектор, которые подлежат к определению.

Тогда $z_{j+1} = M_{j+1} y_{j+1,0} + N_{j+1}$.

Учитывая эти выражение в (17), (18) имеем

$$M_{j+1}\left(\left(1 + h_j A_j\right) y_{j,0} + h_j B_j\right) + N_{j+1} = M_j y_{j,0} + N_j + h_j n_j y_{j,0}, \tag{21}$$

$j = 0,1,.., J-1$.

Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$M_j = M_{j+1}\left(1 + h_j A_j\right) - h_j n_j, \tag{22}$$

$$N_j = N_{j+1} + h_j M_{j+1} B_j, \; j = 0,1,.., J-1.$$

В (20) при $j = J$ имеем

$$M_J = 0, N_J = c. \tag{23}$$

Из равенств (22), (23) последовательно определяем M_{J-1}, N_{J-1}, .. , M_0, N_0.

При $j = 0$ из (20) имеем

$z_0 = M_0 y_{00} + N_0 = 0$ и определяем y_{00}.

Конечно-разностный аналог равенства (1)-(3) имеет вид:

$$y_{j+1,i+1} = y_{j,i+1} + y_{j+1,i} - y_{ij} + \tau_i a_{ij}\left(y_{j,i+1} - y_{j,i}\right) + h_j b_{ij}\left(y_{j+1,i} - y_{ij}\right) +$$

$$+ \tau_i h_j c_{ij} y_{ij} + f_{ij}, \; i = 0,1,.., I-1, j = 0,1,.., J-1, \tag{24}$$

$$y_{j+1,0} = \left(1 + \tau_j A_j\right) y_{j,0} + \tau_j B_j, \; j = 0,1,.., J-1,$$

$$y_{0,i+1} = y_{0,i} + \psi_i, \; i = 0,1,.., I-1.$$

Равенства (24) определяют численное решение задачи (1)-(4).

4. Иллюстративные примеры.

Приведем результаты численных экспериментов для линейных систем.

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу типа (1)-(4) для систему уравнении:

$$z_{tx}^1 + 0.1tz_t^1 + txz_t^2 + z_x^1 + xz_x^2 = 0.02t\sin t + 0.1tx\sin x\cos t - 0.1\cos x -$$

$$-0.1x\cos t\cos x$$

$$z_{tx}^2 + 0.2e^{-x}z_t^1 + tz_t^2 + 0.1tz_x^2 + 0.1z_x^2 = 0.1\sin t\cos x + 0.04e^{-x}\sin t -$$

$$-0.1t\sin x\cos t - 0.01t\cos x - 0.01\cos t\cos x,$$

$$(t,x) \in [0;1] \times [0;1],$$

с условиями

$$z_t^1(t,0)=tz^1(t,0)+z^2(t,0)-0.2\sin t-0.2t\cos t$$

$$z_t^2(t,0)=z^2(t,0), \qquad t\in[0;1],$$

$$z_x^1(0,x)=0.1\cos x$$

$$z_x^2(0,x)=0.1\cos x, \qquad x\in[0;1],$$

$$\int_0^1 z^1(t,0)dt+\int_0^1 tz^2(t,0)dt=0.2\sin 1$$

$$0.5\int_0^1 z^1(t,0)dt+\int_0^1 z^2(t,0)dt=0.1\sin 1 .$$

Функция

$$\begin{pmatrix} z^1(t,x) \\ z^2(t,x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.1\sin x+0.2\cos t \\ 0.1\sin x\cos t \end{pmatrix}$$

является точным решением поставленной задачи. В таблице 1-3 приведены результаты численных расчетов рассматриваемой задачи.

Таблица 1

Численные результаты решения задачи при N=40, M=40

τ	h	Приближенное решение		Точное решение	
		$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$	$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$
0	0.2	0.2202	0.0223	0.2198	0.0198
0.2	0.4	0.2346	0.0405	0.2349	0.0381
0.4	0.6	0.2392	0.0549	0.2406	0.0520
0.6	0.7	0.2267	0.0570	0.2294	0.0531
0.8	0.9	0.2124	0.0600	0.2176	0.0545

Таблица 2

Численные результаты решения задачи при N=80, M=80

τ	h	Приближенное решение		Точное решение	
		$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$	$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$
0	0.2	0.2200	0.0211	0.2198	0.0198
0.2	0.4	0.2347	0.0394	0.2349	0.0381
0.4	0.6	0.2397	0.0539	0.2406	0.0520
0.6	0.7	0.2275	0.0563	0.2294	0.0531
0.8	0.9	0.2136	0.0596	0.2176	0.0545

Таблица 3

Численные результаты решения задачи при N=100, M=100

τ	h	Приближенное решение		Точное решение	
		$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$	$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$
0	0.2	0.2200	0.0208	0.2198	0.0198
0.2	0.4	0.2348	0.0392	0.2349	0.0381
0.4	0.6	0.2398	0.0537	0.2406	0.0520
0.6	0.7	0.2277	0.0561	0.2294	0.0531
0.8	0.9	0.2138	0.0595	0.2176	0.0545

Пример 2. Рассмотрим численное решение следующей системы краевой задачи типа (1)-(4):

$$z_{tx}^1 + tz_t^1 + 0.1txz_t^2 + xz_x^1 + 0.1t^2 z_x^2 = -0.2t - 0.32xt^2 - 0.1t^2$$

$$z_{tx}^2 + 0.5xz_t^1 + 0.2t^2 z_t^2 + 0.5tz_x^1 + 0.5tz_x^2 = -0.1x^2 t - 0.09t^3 - 0.5t,$$

$$(t,x) \in [0;1] \times [0;1],$$

с условиями

$$z_t^1(t,0) = z^1(t,0) + tz^2(t,0) - 0.5 - 0.1t^3$$

$$z_t^2(t,0) = tz^1(t,0) + z^2(t,0) - 0.3t - 0.1t^2, \qquad t \in [0;1],$$

$$z_x^1(0,x) = 0$$

$$z_x^2(0,x) = 1, \qquad x \in [0;1],$$

$$\int_0^1 tz^1(t,0)dt + \int_0^1 z^2(t,0)dt = \frac{17}{60}$$

$$\int_0^1 z^1(t,0)dt + 0.1\int_0^1 tz^2(t,0)dt = 0.5025 .$$

Точное решение задачи определяется следующими функциями:

$$\begin{pmatrix} z^1(t,x) \\ z^2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1t^2 x + 0.5 \\ 0.1t^2 + x \end{pmatrix}.$$

В таблице 4-6 приведены результаты численных расчетов рассматриваемой задачи.

Таблица 4

Численные результаты решения задачи при N=40, M=40

τ	h	Приближенное решение		Точное решение	
		$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$	$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$
0	0.2	0.4989	0.2305	0.5000	0.2000
0.2	0.4	0.5008	0.4362	0.5040	0.4040
0.4	0.6	0.5097	0.6499	0.5160	0.6160
0.6	0.7	0.5267	0.7717	0.5360	0.7360
0.8	0.9	0.5613	1.0017	0.5640	0.9640

Таблица 5

Численные результаты решения задачи при N=80, M=80

τ	h	Приближенное решение		Точное решение	
		$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$	$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$
0	0.2	0.4994	0.2152	0.5000	0.2000
0.2	0.4	0.5011	0.4200	0.5040	0.4040
0.4	0.6	0.5096	0.6329	0.5160	0.6160
0.6	0.7	0.5259	0.7538	0.5360	0.7360
0.8	0.9	0.5594	0.9827	0.5640	0.9640

Таблица 6

Численные результаты решения задачи при N=100, M=100

τ	h	Приближенное решение		Точное решение	
		$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$	$z^1(t,x)$	$z^2(t,x)$
0	0.2	0.4995	0.2121	0.5000	0.2000
0.2	0.4	0.5012	0.4168	0.5040	0.4040
0.4	0.6	0.5096	0.6295	0.5160	0.6160
0.6	0.7	0.5257	0.7502	0.5360	0.7360
0.8	0.9	0.5590	0.9790	0.5640	0.9640

Заключение. Исследовано численное решение систем гиперболических уравнений с интегральными условиями. Предложенный метод решения основан на расщеплении, который приводит к решению вспомогательных задач Коши. Приведенные численные эксперименты подтвердили устойчивость метода и дали возможность применения их результатов с высокой точностью к нелинейным системам с использованием методов линеаризации.

Авторы благодарят профессора Ягубова М.А. за полезные замечания при рецензировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тауфер И. Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1981, с. 140
2. Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. №11. С. 1221-1228.
3. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. №2. P. 155-160.
4. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №1. С. 72-81.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
6. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. Моделирование. 2000. Т. 12. №1. С. 94-103.

İNTEQRAL ŞƏRTLƏRLƏ VERİLMİŞ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

T.V.ŞİRİNOV, Y.Ə.ŞƏRİFOV

XÜLASƏ

Məqalədə qeyri-lokal şərtlərlə verilmiş hiperbolik tənliklər sisteminə baxılmışdır. Belə sistemlərin ədədi həlli üçün üsul təklif olunmuşdur. Ədədi eksperimentlərin nəticələri verilmişdir.

NUMERICAL METHOD FOR THE DECISION OF SYSTEMS OF THE HYPERBOLIC EQUATIONS WITH INTEGRATED CONDITIONS

T.V.SHIRINOV, Ya.A.SHARIFOV

SUMMARY

In article the system of the linear hyperbolic equations with non local conditions is considered. The numerical method of the decision of such systems is offered. The results of numerical experiments are given.